第 11 講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質

例題

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 次の等式を証明せよ。

(i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

第11講　PART1 確認問題

1　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=$ ア

ア は，次の①～④のうちから選べ。

① $|\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

② $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

③ $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

④ $|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

2　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=$ イ

イ は，次の①～④のうちから選べ。

① $|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2$

② $|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

④ $|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

3　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，

$3\vec{a}+2\vec{b}$ の大きさは $\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

第 11 講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質

例題

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(1) (i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$

(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\times2+3^2=21$

$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ より　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{21}$

練習

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(1) (i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times(-2)+9\times3^2=121$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq 0$　より　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{121}=11$

第11講　PART1 確認問題 解答

1　[正解] ア：③

[解説]

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}$$ [A]

$$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=|\vec{\boldsymbol{a}}|^2+\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}-\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}$$

[A]　内積の計算は，文字式の展開と同じように行うことができる。

2　[正解] イ：④

[解説]

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$$ [B]

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot(2\vec{b})-(2\vec{b})\cdot\vec{a}+(2\vec{b})\cdot(2\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

$$=|\vec{\boldsymbol{a}}|^2-4\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}+4|\vec{\boldsymbol{b}}|^2$$

[B]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

（k は実数）

3　[正解] ウエ：37

[解説]

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$$ [C]

$$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

$$=9\times1^2+12\times(-3)+4\times4^2$$

$$=9-36+64$$

$$=37$$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ より，

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{37}}$$

[C]

$s\vec{a}+t\vec{b}$（s，t は実数）の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$

のように，2 乗すると「内積」として演算を行うことができる。